

# Nosaltres com a recurs: *role-plays* a classe de matemàtiques (i 2)

Anton Aubanell

En el número anterior del *NouBiaix* ja dedicàvem aquesta secció a l'ús de *role-plays* per a l'educació matemàtica. Després d'una introducció general, presentàvem alguns exemples de *role-play* (representació de l'algorisme d'ordenació pel mètode de la bombolla, construcció de la corba tractriu, representació de corbes de persecució, descoberta de l'espiral logarítmica a partir del vol del falcó). Al final del text, s'indicava que, en el següent número del *NouBiaix*, es proposarien altres *role-plays* per treballar idees matemàtiques. Aquest serà, doncs, l'objectiu del present escrit, en el qual descriurem amb molt de detall el primer *role-play* (sobre coordenades en el pla) i després, ja més breument, n'apuntarem d'altres.

## Representació de condicions algebraiques sobre els punts del pla

Aquest és un dels *role-plays* més potents que conec. Intentaré descriure'l amb una mica de detall. D'entrada, situarem els alumnes asseguts formant una quadrícula (de  $5 \times 5$ ,  $5 \times 6$ ,  $6 \times 6$ ..., dependrà del nombre de participants) i, successivament, demanarem que es posin drets els alumnes que compleixen determinades condicions (els que tenen una «a» en el nom, els nascuts el mes de juny, els que tenen una mascota a casa seva...). En cada cas, un grup d'alumnes es posarà dempeus i serà interessant subratllar la irregularitat del «dibuix» que formen les persones dretes, fet que després es posarà en contrast amb la regularitat dels resultats derivats de condicions algebraiques.

A continuació, els diem que ara seran punts del pla, éssers geomètrics que ja no tenen nom, ni data de naixement, ni altres característiques «personals», però que, gràcies a Descartes, tenen dues coordenades que els defineixen. Procedim, doncs, a assignar aquest parell de nombres

a cada alumne-punt. Tot movent-nos per davant de la primera fila, anirem assenyalant les diverses columnes indicant-los la seva primera coordenada: «La vostra primera coordenada és 0. Sentiu-vos contents, sou l'eix d'ordenades! La vostra primera coordenada és 1, la vostra primera coordenada és 2...». Després, movent-nos lateralment, anirem assenyalant cada fila indicant-los la seva segona coordenada: «La vostra segona coordenada és 0. Quin goig, sou l'eix d'abscisses! La vostra segona coordenada és 1, la vostra segona coordenada és 2...». Arribats aquí cada alumne-punt ja té les seves coordenades. És important assegurar-se que les recordin. Es pot recomanar que les escriguin en un paper i, alhora, fer comentaris que els vinculin a les seves coordenades: «Tot un honor ser l'origen de coordenades» (assenyalant la persona corresponent), «Maria, quines coordenades tens?» (quan la Maria respongui, se li pot dir «Però no havíem quedat que ja no eres la Maria?»). Comentaris com aquests els ajudaran a entrar en el seu paper com a punts.

A continuació, començarem a posar condicions sobre les coordenades. És bo enunciar la condició i demanar-los que no es posin drets de seguida, sinó que pensin un moment si la compleixen o no. Després ja els direm «ara poseu-vos drets». Això dona temps perquè tothom faci el càlcul sense la pressió del moviment dels més ràpids. Després, el procés ja s'accelerará. Així, començarem a posar condicions com les següents:

«Que es posin dempeus aquells alumnes-punts les coordenades dels quals sumin 4!». Apareixerà una recta. Ara, els «dibuixos» formats pels punts que compleixen les condicions són regulars!

«Ara que es posin dempeus aquells alumnes-punts que tenen les dues coordenades iguals!». Apareixerà una altra recta.

«Ara aquells que la primera coordenada menys la segona doni 1!»...

Anirem imposant condicions com aquestes i obtindrem diferents rectes.

Aviat s'evidenciarà la conveniència d'escriure les condicions a la pissarra. Serà una bona oportunitat per passar dels enunciats verbals al llenguatge algebraic. Així, anomenant  $x$  a la primera coordenada i  $y$  a la segona, escriurem a la pissarra expressions com  $x + y = 4$ ,  $x = y$ ,  $x - y = 1$ ... Donat que les coordenades de cada alumne-punt són enteres és recomanable no emprar gaires condicions en les quals les coordenades quedin multiplicades per coeficients diferents d'1, ja que podria ser que fossin complides per pocs alumnes-punts o, fins i tot, per cap.

Després passarem a les condicions compostes posant drets els alumnes que en compleixin una, a continuació els que compleixin l'altra i finalment demanant que es posin drets els que compleixin les dues. Així estarem resolent sistemes d'equacions lineals del tipus:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ x = y \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{array} \right\}$$

Serà interessant donar importància a l'alumne-punt solució subratllant que s'ha aixecat en les dues condicions. A partir d'aquí, podem plantejar algun sistema incompatible (observant que ningú s'aixeca dues vegades) o compatible indeterminat (observant que s'aixequen els mateixos conjunts d'alumnes-punts). Si proposem un sistema del tipus

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{array} \right\}$$

observarem que no apareix cap alumne-punt que el compleixi malgrat que no és incompatible. Una reflexió que ajudarà a «descobrir» les limitacions de treballar tan sols amb coordenades enteres.

Ara passarem a les inequacions demanant que, successivament, es posin dempeus els alumnes-punts que compleixin condicions com les següents:  $x + y > 4$ ,  $x + y \geq 4$ ,  $x + y \leq 4$ ,  $x + y < 4$ ,  $x > y$ ,  $x \geq y$ ,  $x < y$ ,  $x \leq y$ ... S'observarà que ara ja no apareixen rectes, sinó semiplans que podran o no contenir la recta frontera segons valgui o no la igualtat. Convé deixar que els alumnes ho descobreixin i ho expressin amb les seves pròpies paraules. També podrem «construir» les regions corresponents a condicions del tipus  $x + y \neq 4$ ,  $x \neq y$ , observant que són la unió dels semiplans corresponents a cadascuna de les dues desigualtats estrictes.

Si establim una dinàmica àgil, el *role-play* es convertirà en una espècie de coreografia. M'agrada acabar aquesta part de l'activitat amb un punt d'emoció i la frase «Us n'adoneu que esteu ballant al ball que us toca l'àlgebra?». Em sembla una bona manera de subratllar la relació entre l'expressió analítica d'una condició algebraica amb dues incògnites i la seva representació gràfica en el pla.

Finalment, passarem als sistemes d'inequacions lineals, com per exemple:

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x + 1 \\ x + y \leq 5 \end{array} \right\}$$

Observarem que ara obtenim regions del pla que apareixen com a intersecció de semiplans. Serà interessant abordar els casos de regions «especials» com franges infinites com

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ x + y \geq 1 \end{array} \right\}$$

o sistemes incompatibles com  $\left. \begin{array}{l} y \geq x + 1 \\ x - y \geq 1 \end{array} \right\}$ .

El fet de posar en joc únicament punts de coordenades enteres aconsella plantejar condicions algebraiques simples, però en el cas de les inequacions, és possible complicar les expressions, ja que no es tracta tant de representar el límit de la zona (que potser no conté gaires punts de coordenades enteres) com la regió que compleix la condició. Així, fins i tot es poden plantejar inequacions de segon grau amb dues incògnites.

L'activitat pot acabar representant sistemes d'inequacions més complexos com els que determinen la regió admissible en els problemes de programació lineal. Per exemple:

$$\left\{ \begin{array}{l} y \leq x + 2 \\ y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ x + y \leq 6 \end{array} \right.$$

Així apareixerà una regió convexa del pla com a intersecció de diversos semiplans que, en aquest cas, inclouen totes les fronteres. En el marc de la programació lineal, un cop s'ha determinat la regió admissible, serà interessant que cada alumne-punt de la regió avaluï la funció objectiva «en ell», s'observin les direccions de variació i s'identifiqui el punt (o els punts) que l'optimitzen.

Un cop realitzat el *role-play*, quan els alumnes encara estan situats formant una quadrícula, és interessant representar a la pissarra la pròpia distribució posant, al costat de cada punt, les tres primeres lletres del nom de l'alumne corresponent i refent les representacions realitzades, però ara amb colors sobre la pissarra. És un pas clau per avançar cap a la progressiva abstracció. Finalment, com en quasi totes les activitats d'experimentació, serà bo convidar els alumnes a fer compartir i comentar «cròniques» gràfiques o escrites de l'activitat duta a terme. Això ajuda a fixar les idees treballades.

Naturalment, aquest *role-play* surt millor com més alumnes hi participen. També pot enriquir-se si se situa una càmera en un punt elevat i es projecten les imatges en una pantalla on, en temps real, s'hi puguin veure els mateixos participants. Així encara es visualitzen, d'una manera més clara, les formes que van sortint.

Aquest és un *role-play* molt agraït, que es pot fer en diferents cursos, motivador, que no exclou ningú i eficient pel que fa a l'aportació d'idees matemàtiques significatives.

## Representació de situacions combinatòries

L'estudi de l'agrupament i l'ordenació d'elements segons determinats criteris es pot enriquir amb l'ús de petits *role-plays* en els quals són els propis alumnes els que formen els grups i s'ordenen. L'experiència personal ajuda a descobrir les idees clau de combinatòria i facilita l'establiment de tècniques de recompte. A diferència d'altres casos, aquí el participant en el *role-play* interpreta un paper de persona en un escenari realista, però el conjunt de l'acció representa una idea matemàtica. En el vídeo *Quant tardarien en ocupar totes les posicions possibles 13 persones en una fila?*, creat pels alumnes de l'Institut Pere Fontdevila de Gironella sota la direcció dels seus professors, Susanna Bardés, Salvador Cardona i Dolors Marina, i presentat al VídeoMat, es mostra un exemple brillant i sorprenent d'aquest tipus de *role-plays* (<https://goo.gl/K5zNmB>). Tretze alumnes d'educació infantil es proposen assegurar-se de totes les maneres possibles en tretze cadires; van provant i, a dues ordenacions per segon (una velocitat notable!), va passant el temps, es van fent grans i envelleixen... Més de 98 anys! Tota una vida, com afirma un dels personatges del vídeo. Vegeu la imatge 1.

## Representació de funcions

En aquest cas, els alumnes faran el paper de nombres enters consecutius i es col·locaran alineats al llarg, per exemple, de la paret de davant de l'aula. Donada una funció, cadascú calcularà el valor d'aquesta funció «en ell», és a dir, el resultat de substituir la variable independent pel nombre que l'alumne representa. Després, els alumnes-nombres aniran dient els corresponents valors de la funció i podran representar-los aixecant més o menys la mà per sobre del cap (fins i tot pujant sobre una cadira), situant la mà plana sobre del pit per



**Imatge 1. Quatre ordenacions de les que apareixen en el vídeo. Tota una vida!**

indicar el zero o abaixant més o menys la mà (fins i tot ajupint-se) per indicar valors negatius. A la mà poden portar un paper de color per visualitzar millor el resultat conjunt. Anirà bé escollir un interval de nombres en què hi hagi valors positius i negatius de les imatges. Aquest és un *role-play* relativament simple, però didàcticament potent perquè posa en joc aspectes fonamentals per introduir els gràfics de funcions: idea de la funció com una correspondència entre nombres, tendències en els valors de la funció, creixement, decreixement, zeros...

A continuació, descrivim un exemple d'aquest tipus de *role-plays*. Assignem a onze alumnes els nombres  $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$  i  $6$ , i els convidem a situar-se ordenadament davant de la pissarra. Després donem la funció  $f(x) = x^2 - 2x - 8$  demanant que cada alumne-nombre calculi el valor de la funció «en ell»:  $16, 7, 0, -5, -8, -9, -8, -5, 0, 7$  i  $16$ . A continuació aniran indicant verbalment (i si pot ser gestualment) els valors de les respectives imatges i procurarem «viure» la seva evolució: comencen essent positius, després decreixen fins al 0 i continuen decreixent fins arribar a un mínim a partir del qual creixen passant pel zero i tornant a valors positius...

Les funcions i els intervals numèrics que es poden «representar» en aquest *role-play* són diversos: es pot començar per funcions lineals i afins (prenent intervals en els quals s'obtinguin imatges positives i negatives) i arribar fins a funcions que amaguen alguna sorpresa com la de proporcionalitat inversa (prenent intervals que continguin el 0).

El professor Manel Martínez, en el col·legi La Salle Bonanova, fa un *role-play* gegantí per introduir els conceptes bàsics de funcions. Els alumnes es divideixen en dos grups (A i B) i, dins de cada grup, es numeren a partir de l'1 seguint qualsevol criteri. Cada alumne del grup A tria, si vol, un número dels del grup B, però no el diu. Després es va al pati i se situen els dos grups (ordenats) en dues semirectes perpendiculars (que seran els eixos de coordenades i que delimitaran el primer quadrant). Llavors cada alumne del grup A diu el nombre que ha escollit (pot no haver-ne escollit cap, cas en què estaria fora del domini) i l'alumne corresponent del grup B col·loca un objecte (jaqueta, motxilla...) a l'altura on es trobi ell i l'alumne que l'ha triat. Així s'aniran posant en joc diferents conceptes bàsics en l'estudi de funcions: conjunt inicial i final, relació, variable independent, variable dependent, imatge d'un element, antiimatges, domini i recorregut... És molt recomanable llegir la descripció d'aquest *role-play* i veure'n les imatges en el blog *El punt singular* (<https://goo.gl/6W87mK>).

## Diagrames estadístics

En aquest cas, els alumnes formen diagrames que representen dades estadístiques. La imatge 2 conté dues fotografies corresponents a activitats de l'equip de mestres de l'escola Sadako de Barcelona. La primera (presentada al concurs de fotografia matemàtica de l'ABEAM) mostra un diagrama de barres basat en el color de la bata i la segona la distribució de freqüències dels alumnes segons el mes de naixement.

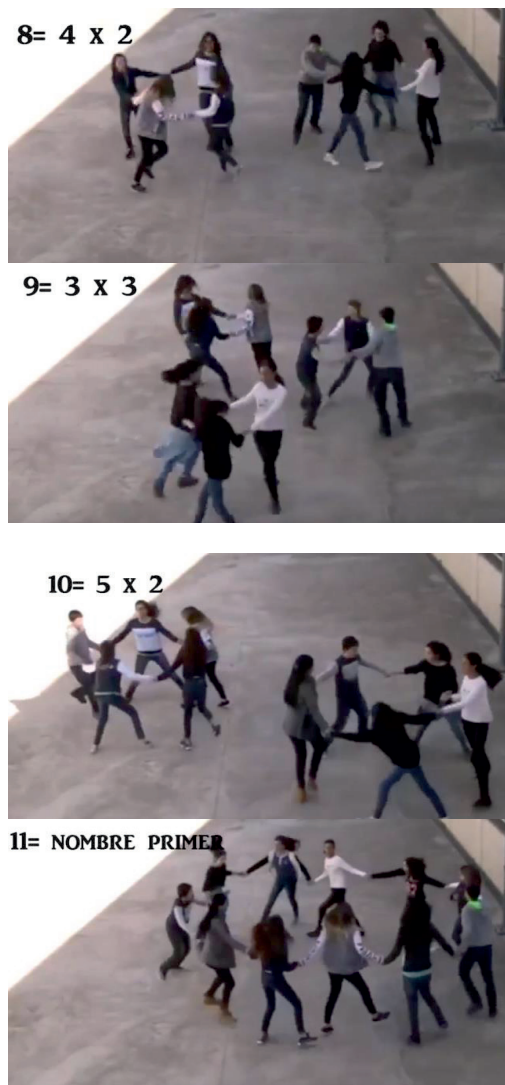


Imatge 2. Diagrames de barres «humans». Escola Sadako, Barcelona.



## Visualització dels nombres primers i compostos

Sovint les propietats aritmètiques són les que més dificultat presenten per ser treballades fora de la pissarra i dels quaderns. Això encara fa més encantador un *role-play* entorn dels nombres primers i compostos que portava a terme el professor Albert Herrero amb els seus alumnes del Club Matemàtic Googolplex (Canet de Mar-Sant Cebrià de Vallalta-Sant Pol de Mar). Es tracta d'una coreografia en la qual, sempre en moviment, hi participen successivament 1 alumne, 2 alumnes, 3 alumnes, 4 alumnes... Quan el nombre d'alumnes és primer s'agrupen en una única rotllana, quan és compost fan diverses rotllanes d'igual nombre d'alumnes. Una activitat bonica i dinàmica que pot veure's en el vídeo <<https://goo.gl/Q5Jhth>>. La imatge 3 en recull quatre escenes.



Imatge 3. Quatre escenes del *role-play* de nombres primers i compostos.

Aquests són tan sols alguns exemples d'ús de *role-plays* en educació matemàtica. Se'n podrien afegir d'altres, segur que molts mestres i professors tenen els seus; tanmateix, aquest escrit i el del número anterior del *NouBiaix* no tenen cap pretensió d'exhaustivitat, sinó que volen ser una invitació a emprar i compartir aquest tipus de recursos en els quals, d'una manera dinàmica, es conjuga l'acció personal amb la representació col·lectiva de situacions matemàtiques riques des del punt de vista didàctic. Després d'haver realitzat el *role-play* de coordenades amb un grup d'alumnes, se'ls va demanar que en fessin una valoració. Un d'aquests alumnes va escriure: «És interessant com fent una cosa tan simple com aixecar-se quan toca es pot explicar una cosa tan difícil». És el valor afegit d'allò que és coral, de l'experiència compartida de construcció de coneixement matemàtic.

El mes de juliol de 2017 alguns d'aquests *role-plays* varen ser presentats al *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* a Madrid pel nostre grup Cúbic, Grup de Didàctica de les Matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de Barcelona. Els components del grup que ho vàrem presentar són: Sergi Belmonte Palmero, Anna Bosch Camós, Abraham de la Fuente Pérez, Raül Fernández Hernández, Jordi Font González, Paula Lopez Serentill, Sílvia Margelí Voelp, Manel Martínez Pascual, Francesc Massich Vall, Laia Miró Manasanch, Lluís Mora Cañellas, Laura Morera Úbeda, Sergi Muria Maldonado, Anton Aubanell Pou.

